PRIMER PARCIAL **CÁLCULO NUMÉRICO** 18-6-2010

- Duración del examen: 2 horas
- La nota del examen será la media de la nota de los problemas planteados. Los problemas puntúan lo mismo.
- Fecha prevista de publicación de notas: 1-Julio -2010
- Los alumnos que deseen revisar su examen deberán solicitarlo por escrito los días 2 y 5 de Julio (de 9:00 a 14:00 horas) en el despacho D-5210. La revisión en presencia del alumno será el día 6 de Julio a las 13 horas en la Sala de Reuniones 2, situada junto a D.5208.

1^er Problema

1. (3/10 puntos) Se considera el problema de interpolar una función f(x) por un polinomio p(x) de grado el menor posible, en los siguientes datos:

$$p(x_0)=f(x_0), \quad p(x_1)=f(x_1), \quad p'(x_0)=f'(x_0), \quad x_0 \neq x_1 \cdot$$

Dar la expresión del polinomio p(x) en términos de los datos anteriores.

2. (5/10 puntos) Se pretende construir una vía que adopta la forma de una función spline cuadrado s(x) sobre los nodos $\{-1, 0, 1\}$, tal que $s'(-1)=0$ y que interpola los datos de la tabla:

x_k	-1	0	1
$s(x_k)$	0	2	3

Dar la expresión de la función spline especificada.

3. (2/10 puntos) Dar una estimación del valor absoluto del error que se comete al simular la función $f(x)=\log(x)$ por el polinomio p(x) descrito en el apartado 1, con $x_0=1, x_1=2,$ en el intervalo $[1, 2]$.

2º Problema

1. (4/10 puntos) Calcular una base ortogonal en el espacio de polinomios de grado dos P_2 utilizando el producto escalar discreto $\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = \sum_{i=1}^{3} w_i f(x_i) g(x_i)$ en los puntos $x_1=-1, x_2=0, x_3=1$ y con los pesos $w_1=1, w_2=2, w_3=1$.

2. (6/10 puntos) Obtener el polinomio de grado no mayor que 2, mejor aproximación por mínimos cuadrados discretos de la función $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, utilizando los resultados del apartado anterior.

<u>3^er Problema</u>

Para calcular el valor positivo de $\sqrt[4]{2}$ se utiliza el método de Newton-Raphson con la función $f(x) = x^4 - 2$.

Se pide:

1. (5/10 puntos) Probar analíticamente que en el intervalo $[1,2]$ el método converge a la raíz buscada de la ecuación $f(x) = 0$ para cualquier valor inicial $x_0 \in [1,2]$
2. (5/10 puntos) Si la función que se elige es $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$. Dar un intervalo y un valor inicial x_0 que garanticen la convergencia global del método de Newton-Raphson a la raíz buscada.

SOLUCIONES

1^{er} Problema

1. Aplicando la Fórmula de Newton generalizada a los datos del problema, se puede escribir:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 =$$
$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \left[\frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)^2} - \frac{f'(x_0)}{x_1 - x_0}\right](x - x_0)^2.$$

2. Si llamamos $s(x)$ a la función spline pedida, dicha función tiene la expresión.

$$s(x) = \begin{cases} p_1(x), & x \in [0,1] \\ p_2(x), & x \in [1,2] \end{cases} \qquad (1)$$

donde $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son polinomios de grado dos que verifican las siguientes condiciones de interpolación:

$$p_1(-1) = 0 \quad p_1'(-1) = 0$$
$$p_1(0) = p_2(0) = 2$$
$$p_2(1) = 3$$

Aplicando la expresión obtenida en el apartado 1, con los datos: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $p_1(-1) = 0$, $p_1(0) = 2$, $p_1'(-1) = 0$,

se obtiene

$$p_1(x) = 2(x+1)^2$$

Aplicando la expresión obtenida en el apartado 1, con los datos: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $p_2(0) = 2$, $p_2(1) = 3$, $p_2'(0) = p_1'(0) = 4$ (por la continuidad de la derivada de la función spline), se obtiene

$$p_2(x) = 2 + 4x - 3x^2.$$

La función s(x), definida por los polinomios anteriormente calculados, es continua y con derivada continua por construcción. Por tanto es una función spline cuadrada que verifica las condiciones de interpolación dadas.

3. La expresión del error viene dada por:

$$f(x)-p(x)=f[x_0,x_0,x_1,x](x-x_0)^2(x-x_1)=$$
$$\frac{f'''(\zeta)}{3!}(x-x_0)^2(x-x_1), \qquad \zeta\in[x_0,x_1]$$

En el caso de ser $f(x)=\log(x), \quad x\in[1,2]$:

$$|f(x)-p(x)|\le \max_{x\in[1,2]}\left|\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^2(x-2)\right|\le 0.04, \qquad x\in[1,2]$$

- $\max_{x\in[1,2]}|f'''(x)|=\max_{x\in[1,2]}\left|\frac{2}{x^3}\right|\le 2$
- $\max_{x\in[1,2]}|\pi(x)|=|\pi(5/3)|=4/27$, con $\pi(x)=(x-1)^2(x-2)$

2º Problema

El producto escalar queda definido como:

$$<f,g>=f(-1)g(-1)+2f(0)g(0)+f(1)g(1)$$

La base de P_2 que vamos a ortogonalizar por el algoritmo de Gram-Schmidt a partir de $\{1,x,x^2\}$es :

$$l_0=1$$
$$l_1=x-\frac{<x,1>}{<1,1>}1=x$$
$$l_2=x^2-\frac{<x^2,1>}{<1,1>}1-\frac{<x^2,x>}{<x,x>}x=x^2-\frac{1}{2}$$
$$<1,1>=4,<x,1>=<x^2,x>=0,<x^2,1>=2$$

La mejor aproximación pedida usando la base ortogonal anterior viene dada por:

$$u(x)=\frac{<f,1>}{<1,1>}1+\frac{<f,x>}{<x,x>}x+\frac{<f,x^2-1/2>}{<x^2-1/2,x^2-1/2>}(x^2-1/2)$$

3^{er} Problema

1. Teorema de convergencia global del método de Newton-Raphson en un intervalo $[a,b]$:

Sea $f(x) \in C^2[a,b]$, verificando:

1. $f(a)f(b) < 0$
2. $f'(x) \neq 0$ en $[a,b]$
3. $f''(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$
4. $máx\left\{\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|,\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|\right\} \leq (b-a)$

entonces se cumple que:

- Existe una única raíz *s* de $f(x)=0$ en $[a,b]$
- *s* se obtiene como límite de $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $\forall x_0 \in [a,b]$
- Si $f(x) \in C^3[a,b]$ la convergencia es cuadrática

En nuestro caso:

- $f(x) = x^4 - 2$
- $f'(x) = 4x^3$
- $f''(x) = 12x^2$

por tanto, $f(x) \in C^2[1,2]$ y verifica:

1. $f(1)f(2) = -14 < 0$
2. $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [1,2]$
3. $f''(x)$ es siempre positiva en $[1,2]$ y por tanto no cambia de signo en ese intervalo
4. $máx\left\{\left|\frac{f(1)}{f'(1)}\right|,\left|\frac{f(2)}{f'(2)}\right|\right\} = máx\{0.25, 0.4372\} = 0.4372 \leq (2-1) = 1$

y por lo tanto el método de Newton-Raphson converge a la única raíz real positiva de $x^4 - 1 = 0$, es decir, de $f(x) = 0$ en $[1,2]$, para cualquier valor inicial $x_0 \in [1,2]$.
Como $f'''(x) = 24x \Rightarrow f(x) \in C^3[1,2]$ y la convergencia es cuadrática.

2. Con $h(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}=x^2-2x^{-2}$ la ecuación $h(x)=x^2-2x^{-2}=0$ es equivalente a la $f(x)=x^4-2=0$ en el intervalo $[1,2]$

Para la función dada $h(x)=x^2-2x^{-2}=0$; $h'(x)=2x+\dfrac{4}{x^3}$; $h''(x)=2-\dfrac{12}{x^4} \Rightarrow$ $h(x)\in C^2[1,2]$ y se cumple que:

1. $h(1)h(2)=(-1)(3.5)<0$
2. $h'(x)=2x+4x^{-3}=2x+\dfrac{4}{x^3}\neq 0 \quad \forall x\in[1,2]$
3. $h''(x)=2-\dfrac{12}{x^4}$ verificando $h''(1)=-10$; $h''(2)=1.25$ luego $h''(x)$ cambia de signo en el intervalo $[1,2]$

Reducimos, por ejemplo, por bisección, el intervalo $[1,2]$ para encontrar un intervalo donde $h''(x)$ no cambie de signo.
En el intervalo $[1,1.5]$ se verifica:

- $h(1)h(1.5)<0$
- $h'(x)\neq 0$
- $h'(x)\neq 0$ es creciente y negativa en $[1,1.5]$ $\left(h'''(x)=\dfrac{48}{x^5}>0\right)$

  $h''(1)=-1$; $h''(1.5)=-0.37037$

Tomando, por ejemplo, $x_0=1$ donde $h(1)h''(1)>0$ está asegurada la convergencia del método de Newton-Raphson a la raíz buscada.